IV

3346. Alakítsuk át az egyenletet a következő alakúra: $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=p$. Ebből kapjuk, hogy $\cos^2 2x=2\cdot p-1$. Ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha $0\le 2\cdot p-1\le 1$, azaz ha $\frac{1}{2}\le p\le 1$.

3347. $p\le-\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{2}\le p$ esetén 2 megoldása van az egyenletnek. $p=1$ esetén 5 megoldása van az egyenletnek. $-\sqrt{2}<p<\sqrt{2}$, de $p\ne 1$, akkor 4 megoldása van az egyenletnek. Az egyenletet a következő alakúra hozhatjuk: $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=p\cdot(\cos x-\sin x)$, azaz $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-p)=0$, ebből következik, hogy *a)* $\cos x-\sin x=0$; *b)* $\cos x+\sin x-p=0$. Az *a)*-ból $x_1=\frac{\pi}{4}$; $x_2=\frac{5\cdot\pi}{4}$ gyökök esnek bele a $[0;2\cdot\pi]$ intervallumba. Tehát az eredeti egyenletnek bármely valós p-re legalább két megoldása van. A *b)*-ből következik, hogy $-\sqrt{2}\le p\le\sqrt{2}$ esetben van valós megoldása a *b)* egyenletnek, hiszen a *b)* egyenletet átalakíthatjuk a következő alakúra: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{p}{\sqrt{2}}$. Ajánlatos felrajzolni az $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ grafikonját a $[0;2\cdot\pi]$ intervallumon, hogy a megfelelő következtetéseket könnyen levonhassuk.

3348. **1. eset:** $a=1$ esetén: $-\frac{\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi\le x_3\le\frac{3\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi$ a megoldás.

2. ***a)*** **eset:** $a\ge-1$ és $a\ne 1$ esetén $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$ a megoldás.

2. ***b)*** **eset:** $a\le-1$ esetén $x_2=\frac{5\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$ a megoldás. Emeljük négyzetre az egyenletet, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá. Azt kapjuk, hogy: $(a-1)(\sin x-\cos x)=0$.
1. eset: $a=1$ esetén akkor teljesül az egyenlet, ha $\sin x+\cos x\ge 0$, ezt alakítsuk át a következő alakra úgy, hogy elosztjuk az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt. Kapjuk, hogy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$. Ezt az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk az eredeti egyenlet egy megoldását.
2. eset: Ha $a-1\ne 0$, akkor $\sin x-\cos x=0$, ebből $\operatorname{tg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$, de teljesülnie kell, hogy $a\cdot\sin x+\cos x\ge 0$ és $a\cdot\cos x+\sin x\ge 0$, ezek $l=2\cdot k$-nél akkor állnak fenn, ha $a\ge-1$. Ha $l=2\cdot k+1$, akkor az egyenlőtlenségek akkor állnak fenn, ha $a\le-1$.

3349. **1. eset:** $p=\frac{20}{3}$; **2. eset:** $p=-\frac{20}{3}$ esetén van megoldása az egyenlőtlenségnek. Vizsgáljuk meg először az egyenlőtlenség bal oldalát! $\left|\frac{p^2\cdot\sin^2 x+16}{p\cdot\sin x}\right|=|p\cdot\sin x|+\frac{16}{|p\cdot\sin x|}$. Alkalmazzuk az összeg két tagjára a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget! Ebből kapjuk, hogy $\left|\frac{p^2\cdot\sin^2 x+16}{p\cdot\sin x}\right|=|p\cdot\sin x|+\frac{16}{|p\cdot\sin x|}\ge 8$. Ez pontosan akkor áll fenn, ha

$|p \cdot \sin x| = 4$. Nézzük most az egyenlőtlenség jobb oldalát! Ez $\cos x$-re másodfokú kifejezés. Határozzuk meg, hogy ez mikor veszi fel a maximumát! Azt kapjuk, hogy $\cos x = \frac{4}{5}$-nél lesz maximális a kifejezés. Mégpedig a maximum értéke 8. Tehát az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha benne egyenlőség áll fenn. Ekkor viszont $|\sin x| = \frac{3}{5}$ és $|p \cdot \sin x| = 4$. Ebből azt kaphatjuk, hogy $|p| = \frac{20}{3}$.

Trigonometrikus egyenlőtlenségek II. rész

3350. *a)* $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. A $\cos x$-re kapott másodfokú egyenlőtlenséget oldjuk meg! *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{13 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\cos^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. A $\sin x$-re kapott másodfokú egyenlőtlenséget oldjuk meg!

3351. *a)* $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. A $\cos x$-re kapott másodfokú egyenlőtlenséget oldjuk meg! *b)* $-\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Végezzük el a $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ és a $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ helyettesítést! Ekkor kapunk $\cos 2x$-re egy másodfokú egyenlőtlenséget, amelyet oldjunk meg! *c)* $\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot \pi$ Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. Rendezzük nullára a kapott egyenlőtlenséget, majd alakítsuk szorzattá!

3352. Hozzuk közös nevezőre a bal oldalon levő két törtet! Majd a számlálóban kapott negyedik hatványok összegét alakítsuk át a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság négyzetre emelésével kapott azonosság segítségével. A számlálóban alkalmazzuk visszafelé a $\sin 2x$ képletét. Ezt pedig alakítsuk át a $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ azonosság segítségével. A nevezőben szintén alkalmazzuk visszafelé $\sin 2x$ képletét! Kapjuk, hogy $\frac{8 \cdot \left(1 + \cos^2 2x\right)}{\sin^4 2x}$. E törtet csökkentjük, illetve nem növeljük, ha 8-at írunk a számláló helyett és a nevező helyett pedig 1-et.

3353. $-\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3$. Ezt viszont már könnyen szorzattá alakíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - a \cdot b + b^2\right)$. Ezután használjuk fel a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot és alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét visszafelé! Majd használjuk fel, hogy $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, ezután rendezzük nullára az egyenlőtlenséget és azt kapjuk, hogy $\cos 4x > 0$.

3354. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban. Azt kapjuk, hogy elég igazolni a következő egyenlőtlenséget: $\frac{1}{4} \le 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x \le 1$.

3355. $2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^n \cdot x\right) \le \frac{1}{2^{n-1}}$, $\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^n \cdot x\right) \le \frac{1}{2^{n-1}}$.
Folytassuk! (Ha precízek vagyunk, akkor teljes indukcióval.) Kapjuk a végén, hogy $2 \cdot \sin\left(2^n \cdot x\right) \cdot \cos\left(2^n \cdot x\right) \le 1$, azaz $\sin\left(2^{n+1} \cdot x\right) \le 1$.

IV

3356. Alkalmazzuk a $2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\left(\alpha + \beta\right) + \cos\left(\alpha - \beta\right)$ azonosságot! Majd alkalmazzuk a $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ azonosságot és még egyszer az előző azonosságot! Azt kaphatjuk, hogy a feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel: $0 \le \sin^2\beta \le 1$.

3357. *a)* $\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \pi + k \cdot \pi$. Osszuk el az egyenlőtlenséget 2-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.

b) $\frac{13 \cdot \pi}{36} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} < x < \frac{19 \cdot \pi}{36} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban.

c) $\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} < x < \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd osszuk el $\sqrt{2}$-vel. Ezután hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

d) $-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ azonosságot, majd vegyük figyelembe, hogy $-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$. Azután osszuk el az egyenletet 2-vel! Ezután hasonlóan folytatható, mint az előző három feladat folytatása.

3358. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Az egyenlőtlenségből következik, hogy $\sin x > \cos x$. Miért? Rendezzük nullára a kapott egyenlőtlenséget, majd osszuk el $\sqrt{2}$-vel! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

b) $-\frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. A feladat egyenlőtlenségéből következik, hogy $\sin x < \cos x$. Miért? Ezután hasonlóan folytathatjuk, mint az előző feladat megoldását.

3359. $-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < 0 + k \cdot \pi$. A feladat egyenlőtlensége ekvivalens a következővel: $-1 < \sin x + \cos x < 1$. Osszuk el ezt az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3360. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$. Az egyenlőtlenség bal oldalának számlálóját és nevezőjét egyaránt osszuk el $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és kapjuk, hogy: $\dfrac{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)} > \sqrt{3}$, azaz $\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}$. *b)* $0 + k\cdot\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi$. A feladat egyenlőtlenségével ekvivalens a következő: $-1 \le \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \le 1$. Ezután hasonlóan járjunk el, mint az előző feladat megoldásában. Kapjuk, hogy $-1 \le \operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$.

IV

3361. *a)* $\dfrac{\pi}{12} + k\cdot 2\cdot\pi < x < \dfrac{3\cdot\pi}{4} + k\cdot 2\cdot\pi$; $\dfrac{17\cdot\pi}{12} + l\cdot 2\cdot\pi < x < \dfrac{7\cdot\pi}{4} + l\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd alakítsuk szorzattá a jobb oldalt! Ezután rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenséget! Kapjuk, hogy $(\sin x + \cos x)\left(1 - \sqrt{2}\cdot(\cos x - \sin x)\right) > 0$. *b)* $x = \dfrac{\pi}{2} + (2\cdot k + 1)\cdot 2\cdot\pi$. Osszuk el az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Kapjuk, hogy (*) $2\cdot\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sin x - 3$. Mutassuk meg, hogy a (*) egyenlőtlenségben csak az egyenlőség esete állhat fenn, mégpedig pontosan akkor, ha $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ és $\sin x = 1$.

3362. $-\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \dfrac{2\cdot\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi$. Ha négyzetre emeljük az egyenlőtlenséget és felhasználjuk $\sin 2x$ képletét visszafelé, kapjuk rendezés után, hogy $\sin^2 x + 3\cdot\cos^2 x = \sin^2 x + 3\cdot\cos^2 x$. Ez azonosság, de nem minden valós x-re teljesül, hanem csak azokra, amelyekre fennáll, hogy (*) $\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x \ge 0$ és (**) $2 + \cos 2x + \sqrt{3}\cdot\sin 2x \ge 0$. A (*) egyenlőtlenséget osszuk el 2-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \ge 0$. Ennek megoldása $-\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \dfrac{2\cdot\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi$. A (**) egyenlőtlenséget osszuk el 2-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy: $1 + \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \ge -1$. Ez pedig minden x valós számra fennáll.

3363. $\dfrac{\pi}{4} + k\cdot\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\sin 2x = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ (ha $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi$), majd szorozzunk be a nevezővel és kapjuk a következő egyenlőtlenséget: $\operatorname{tg}^3 x - 2\cdot\operatorname{tg}^2 x + 3\cdot\operatorname{tg} x - 2 \ge 0$. Alakítsuk szorzattá ezt az egyenlőtlenséget! $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x\right) + (2\cdot\operatorname{tg} x - 2) \ge 0$ Folytassuk!

3364. $-\dfrac{\pi}{6} + k\cdot 2\cdot\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\cdot 2\cdot\pi$; $\dfrac{3\cdot\pi}{4} + l\cdot 2\cdot\pi < x < \dfrac{7\cdot\pi}{6} + l\cdot 2\cdot\pi$; $\dfrac{5\cdot\pi}{4} + m\cdot 2\cdot\pi < x < \dfrac{7\cdot\pi}{4} + m\cdot 2\cdot\pi$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét és kapjuk, hogy $4\cdot\sin^3 x + 2\cdot\sin^2 x - 2\cdot\sin x - 1 < 0$. Alakítsuk szorzattá ezen egyenlőtlenséget! Kapjuk, hogy $4\cdot\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0$, ebből

$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0.$

IV

3365. $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x = \sin 2x\cdot\frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x - 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x}{2} = \frac{\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x}{4} < \frac{3}{4}$. Miért? Mutassuk meg, hogy egyenlőség valóban nem állhat fenn.

3366. **1. megoldás vázlata:** Legyen $z = \cos\frac{x+y}{2}$, ekkor $4\cdot z^2 - 2\cdot z\cdot\cos\frac{x-y}{2} + \frac{1}{4} = \left(2\cdot z - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \cos^2\frac{x-y}{2}\right) \ge 0.$

2. megoldás vázlata: Az **a**, **b**, és **c** vektorok közös kezdőpontúak legyenek. Legyen x az **a** és a **b** vektorok hajlásszöge és y pedig a **b** és a **c** vektorok hajlásszöge, míg $x+y$ vagy $2\cdot\pi - (x+y)$ a **c** és az **a** vektorok hajlásszöge. Ekkor $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 \ge 0$, azaz

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos x + 2\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdot\cos y + 2\cdot|\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos(x+y) \ge 0,$

és legyen $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| = 1$ és $|\mathbf{b}| = \frac{1}{2}$.

3367. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét x-re és y-ra is, majd emeljünk ki a két megfelelő tagból $\sin x\cdot\sin y$-t, kapjuk, hogy $8\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot(\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y) - 1 \le 0$.

Ebből $8\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y) - 1 \le 0$, $\quad 0 \le 1 - 8\cdot\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}\cdot\cos(x+y)$.

Tovább folytatva: $0 \le \sin^2(x-y) + \cos^2(x-y) + 4\cdot\cos^2(x+y) - 4\cdot\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$,

$0 \le (2\cdot\cos(x+y) - \cos(x-y))^2 + \sin^2(x-y)$.

3368. Használjuk fel a megfelelő összegzési tételt a bal oldalon, végezzük el itt a négyzetre emelést és végezzük el a szorzást a jobb oldalon! Kissé rendezzük át a kapott egyenlőtlenséget a következő alakúra: $\cos^2 x\cdot\cos^2 y - 2\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\cos x\cdot\cos y + \sin^2 x\cdot\sin^2 y \le$
$\le 4 - 4\cdot(\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y)$. Ebből: $\cos^2(x+y) \le 4 - 4\cdot\sin(x+y)$,
$1 - \sin^2(x+y) \le 4 - 4\cdot\sin(x+y)$, $1 \le \sin^2(x+y) - 4\cdot\sin(x+y) + 4$,
$1 \le (\sin(x+y) - 2)^2$. Ez miért teljesül minden valós x, y számra?

3369. $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$, $\sin 3x = 3\cdot\sin x\cdot\cos^2 x - \sin^3 x$. Felhasználva az előző azonosságokat, kapjuk, hogy: $\sin x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x + \frac{1}{3}\cdot\sin 3x = \ldots = \frac{\sin x}{3}\cdot\left(2 + 3\cdot\cos x + 4\cdot\cos^2 x\right) = \frac{\sin x}{3}\cdot\left((1+\cos x)^2 + (1+\cos x) + 3\cdot\cos^2 x\right) > 0$, mert $\sin x > 0$, ha $0 < x < \pi$, míg a második tényező tagjai nemnegatívak (és egyszerre mindhárom tag nem lehet nulla). Fejér Lipót (1880-1959) híres magyar matematikus igazolta, hogy bármely pozitív egész n-re teljesül, hogy $\sin x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x + \frac{1}{3}\cdot\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\sin nx > 0$, ha $0 < x < \pi$ fennáll.

3370. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\cos x + 3 \cdot \cos 3x + 6 \cdot \cos 6x < -\frac{115}{16}$.
Ebből $\cos x + 3 \cdot \cos 3x + (6 \cdot \cos 6x + 6) < -\frac{19}{16}$, $\cos x + 3 \cdot \cos 3x + 12 \cdot \cos^2 3x < -\frac{19}{16}$, $3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2 3x + \cos 3x + \frac{1}{16}\right)^2 + \cos x < -1$, $3 \cdot \left(2 \cdot \cos 3x + \frac{1}{4}\right)^2 + \cos x < -1$. Ez nem teljesülhet, mert a zárójeles kifejezés nemnegatív, míg $\cos x \geq -1$. Tehát nem igaz a feltevésünk, ezért az eredeti egyenlőtlenség teljesül.

3371. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a bal oldali összeg két pozitív tagjára!

3372. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a bal oldali összeg két pozitív tagjára! Majd használjuk fel, hogy $\frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Miért? Másrészt használjuk fel a következő becslést: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1$.

3373. Megmutatjuk, hogy (*) $2^{-\cos^2 x} + 2^{-\sin^2 x} \geq \sqrt{2}$ és (**) $\sqrt{2} \geq \sin y + \cos y$. (*) mindkét bal oldali tagja pozitív , ezért alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Majd használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (**)-nál osszuk el az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $1 \geq \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$, ez pedig teljesül. S mivel átalakításaink megfordíthatóak, ezért (**) is teljesül. (*)-ból és (**)-ból következik a feladat egyenlőtlenségének fennállása.

3374. $x = 2$ az egyenlőtlenség megoldása. Használjuk fel, hogy $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, kapjuk, hogy $\left(x^2 - 4 \cdot x + 3\right) \cdot \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos^2(\pi \cdot x) + 1\right) \geq 2$. Ebből kaphatjuk, hogy $-\left(x^2 - 4 \cdot x + 3\right) \cdot \log_2\left(\cos^2(\pi \cdot x) + 1\right) \geq 1$. Ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$, akkor az előbbi egyenlőtlenség bal oldala negatív vagy nulla. Ezt az első tényező vizsgálatából nyerhetjük, hiszen a második tényező mindig nemnegatív. Tehát $1 < x < 3$-nak kell lennie, de $x = 2$ kivételével $-\left(x^2 - 4 \cdot x + 3\right) < 1$, míg $x = 2$-nél a másodfokú kifejezés értéke 1. Másrészt gondoljuk meg, hogy $1 \geq \log_2\left(\cos^2(\pi \cdot x) + 1\right) > 0$ fennáll, ha $1 < x < 3$. Ezt az 1 értéket a lehetséges intervallumban gondoljuk meg, hogy pontosan $x = 2$-nél veszi fel. Tehát az eredeti egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = 2$ és itt egyenlőség lép fel az egyenlőtlenségben.

3375. $x = \frac{1}{2}$ az egyenlőtlenség megoldása. $\log_{\sqrt{3}}\left(2 + 2 \cdot \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) = \ldots =$
$= \log_{\sqrt{3}}\left(3 + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) \geq \log_{\sqrt{3}} 3 = 2$.

IV

Másrészt mutassuk meg, hogy $x - x^2 - \frac{5}{4} \leq -1$. Ebből $-\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \geq 1$, így

$-\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \cdot \log_{\sqrt{3}}\left(2 + 2 \cdot \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) \geq 1 \cdot 2 = 2$, tehát

$\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \cdot \log_{\sqrt{3}}\left(2 + 2 \cdot \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) \leq -2$.

IV

Vegyük figyelembe az eredeti egyenlőtlenséget és azt kapjuk, hogy $\left(x - x^2 - \frac{5}{4}\right) \cdot \log_{\sqrt{3}}\left(2 + 2 \cdot \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) = -2$. Gondoljuk meg, hogy ez az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$, azaz ha $x = \frac{1}{2}$.

3376. $x = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges negatív egész szám; $-\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$, ahol l tetszőleges nempozitív egész szám.

1. eset: Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor könnyen kimutathatjuk, hogy ez megoldás.

2. eset: Ha $x \neq \frac{1}{2}$, akkor fenn kell állniuk a következő egyenlőtlenségeknek: *a)* $1 - 2 \cdot x > 0$, ebből $\frac{1}{2} > x$; *b)* $8 \cdot \cos^2 x - 2 \neq 0$, ebből $x \neq \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$ és $x \neq \pm \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$;
c) $\sin x \neq 0$, ebből $x \neq n \cdot \pi$; *d)* $\sin x \neq \pm 1$, ebből összefoglalás után $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.
e) $\log_{|\sin x|}\left(\frac{(3 + |\operatorname{tg} x|) \cdot \cos^2 x}{8 \cdot \cos^2 x - 2}\right) < 0$. Az *e)*-ből kapjuk, hogy $\frac{(3 + |\operatorname{tg} x|) \cdot \cos^2 x}{8 \cdot \cos^2 x - 2} > 1$. Ezt pedig alakítsuk a következő alakúra: $\frac{3 + |\operatorname{tg} x|}{6 - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x} \geq 1$. Rendezzük nullára, hozzunk közös nevezőre és kapjuk, hogy $\frac{2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + |\operatorname{tg} x| - 3}{6 - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x} \geq 0$, $\frac{2 \cdot |\operatorname{tg} x|^2 + |\operatorname{tg} x| - 3}{6 - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x} \geq 0$.

e) **1. eset:** Ha $2 \cdot |\operatorname{tg} x|^2 + |\operatorname{tg} x| - 3 \geq 0$ és $6 - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x > 0$. Itt az első egyenlőtlenségről mutassuk ki, hogy pontosan akkor teljesül, ha $|\operatorname{tg} x| \geq 1$. Míg a második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $|\operatorname{tg} x| \leq 3$. A két egyenlőtlenségnek egyszerre kell fennállnia: $1 \leq |\operatorname{tg} x| \leq 3$. Ebből következik, hogy $1 \leq \operatorname{tg} x \leq 3$, ennek a megoldása $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, de itt figyelembe kell venni, hogy $x < \frac{1}{2}$, ezért k tetszőleges negatív egész szám lehet.
$-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq -1$, ennek a megoldása $-\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$, itt l-nek tetszőleges nempozitív egész számnak kell lennie, $x < \frac{1}{2}$ miatt.

2. eset: Ha $2\cdot|\mathrm{tg}\,x|^2+|\mathrm{tg}\,x|-3\le 0$ és $6-2\cdot\mathrm{tg}^2<0$. Ekkor az elsőből az következik, hogy (*) $-\frac{3}{2}\le|\mathrm{tg}\,x|\le 1$ és (**) $\sqrt{3}\le|\mathrm{tg}\,x|$ vagy $-\sqrt{3}\ge|\mathrm{tg}\,x|$. (*) és (**) közös része az üres halmaz, tehát ebben az esetben nem kapunk megoldást.

3377. $f_{max}=5$; $f_{min}=-5$. Osszuk el $f(x)$ kifejezését 5-tel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt!

3378. $f_{max}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, ezt akkor veszi fel a függvény, amikor $x=\frac{3\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi$; $f_{min}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, ezt akkor veszi fel a függvény, amikor $x=-\frac{\pi}{8}+l\cdot\pi$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, másrészt $f(x)$ kifejezését osszuk el $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt!

3379. $f_{max}=\frac{7}{6}$; $f_{min}=\frac{1}{6}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, majd hozzuk a következő alakra: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\cos 2x-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\sin 2x\right)$. Ezután alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt!

3380. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögeknél lesz maximális a kerület.

$$a+b=c\cdot\sin\alpha+c\cdot\cos\alpha=c\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right)=\ldots=c\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Folytassuk egy következtetéssel!

3381. Akkor a legkisebb a beírt négyzet kerülete, amikor a csúcsai a nagy négyzet oldalfelező pontjain helyezkednek el. Legyen x a beírt négyzet oldalhossza, ekkor $1=x\cdot\cos\alpha+x\cdot\sin\alpha$, ebből $x=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. Így $k=4\cdot x=\frac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha}=\ldots=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. Folytassuk!

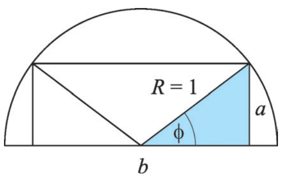
3382. *a)* $f_{max}=1$, ezt akkor veszi fel, ha $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $f_{min}=\frac{1}{2}$, ezt akkor veszi fel, amikor $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. Emeljük négyzetre a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ azonosságot és fejezzük ki a kapott eredményből a negyedik hatványok összegét, majd alkalmazzuk a $\sin 2x$ képletét visszafelé. *b)* $f_{max}=1$, ezt akkor veszi fel, ha $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $f_{min}=\frac{1}{4}$, ezt akkor veszi fel, ha $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$ vagy $x=-\frac{\pi}{4}+m\cdot\pi$. Induljunk ki abból, hogy $\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3$, ezt pedig alakítsuk szorzattá figyelembevéve az $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)$ azonosságot. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, a negyedik hatványok összegével hasonlóan bánhatunk el, mint az előző feladatban. Kapjuk, hogy $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x$.

3383. $f_{max} = \frac{1}{4}$, és ezt $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$-nél veszi fel. $f_{min} = \frac{3}{8}$ és ezt $x = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$-nél veszi fel.

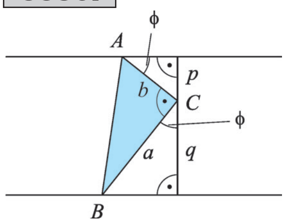
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{3 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + 2 \sin x \cdot \cos x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + \sin 2x}\right).$$

Kapjuk, hogy $f(x) \le \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + (-1)}\right) = \frac{1}{4}$. Másrészt $f(x) \ge \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + 1}\right) = \frac{3}{8}$.

3385.



3386.



3384. $f_{max} = 1$, és ezt ott veszi fel, ahol $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ vagy $x = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot \pi$, $f_{min} = -\frac{5}{4}$, és ezt ott veszi fel, ahol $x = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ és $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Kapjuk, hogy $f(x) = 1 - \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3385. $a = R \cdot \sin\phi$ és $b = 2 \cdot R \cdot \cos\phi$, így $t = a \cdot b = \ldots = \sin 2\phi$, tehát $t_{max} = 1$ és ezt $\phi = 45°$-nál éri el.

3386. $a = \frac{q}{\cos\varphi}$; $b = \frac{p}{\sin\varphi}$. Így $t = \frac{a \cdot b}{2} = \ldots = \frac{p \cdot q}{\sin 2\varphi}$. Tehát $t_{min} = p \cdot q$ és ez akkor következik be, ha $\varphi = 45°$.

3387. *a)* $f_{min} = 4$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi$. Hozzunk közös nevezőre, alkalmazzuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, majd alkalmazzuk visszafelé $\sin 2x$ képletét. Kapjuk előbb-utóbb, hogy $f(x) = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

b) $g_{min} = 9$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $x = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$.

$$g(x) = 5 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \ldots = 5 + \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

3388. $f_{min} = 8$ és ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést az összeg két pozitív tagjára! Kapjuk egy kis rendezés után, hogy

$$f(x) \ge \frac{2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{8}{\sin^2 2x} \ge 8.$$

3389. $f_{min} = 2$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \ldots = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.